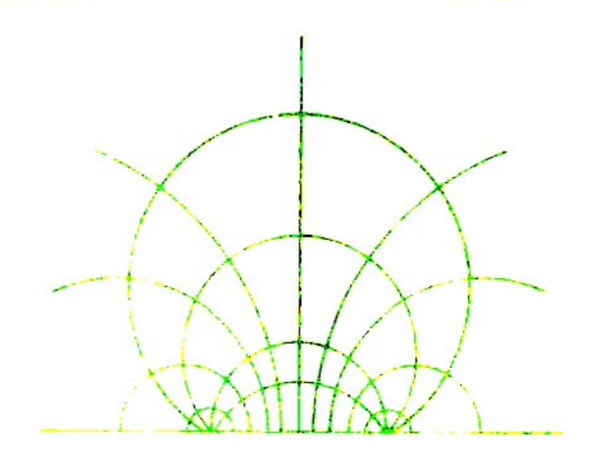
Lecciones populares de matemáticas

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

B. A. Rosenfeld
N. D. Sergeeva



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
и Н. Д. СЕРГЕЕВА

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

ROSENFELD B. A.,
SERGEEVA N. D.

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS. 1977

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

Traducido del ruso
por Medkov K. P.

На испанском языке

RESEÑA

En el folleto se analiza un método, muy singular, de proyección de la esfera sobre un plano, un método de amplia utilización, que se caracteriza por las siguientes propiedades: los ángulos formados por las líneas en la esfera, al ser proyectados en el plano, se representan por ángulos iguales a los primeros y formados por las líneas en el plano, mientras que los círculos en la esfera se representan en la proyección sobre el plano por las circunferencias y líneas rectas.

En él se estudia también la aplicación de este método en la astronomía y la geografía. En la última parte se trata de la proyección analógica del plano de Lobachevski sobre un plano común.

La obra está destinada a los escolares de grados superiores y los estudiantes de la enseñanza superior.

INDICE

Introducción

§ 1. Definición y propiedades principales de la proyección estereográfica

§ 2. Proyección estereográfica e inversión

§ 3. Demostración de las propiedades de la proyección estereográfica mediante el método de coordenadas

§ 4. Métrica esférica en el plano. Aplicación de números complejos

§ 5. Representación del giro de una esfera en el plano

§ 6. Desarrollo histórico de la proyección estereográfica

§ 7. Proyección estereográfica en la astronomía y la geografía

§ 8. Aplicación de la proyección estereográfica a la geometria de Lobachevski

INTRODUCCIÓN

El procedimiento *de la proyección* de figuras sobre un plano se usa en las matemáticas con mucha frecuencia. Para obtener la representación de una figura, haciendo uso del método indicado, se debe elegir en el espacio un punto, llamado centro de proyección, unirlo, mediante rectas, con todos los puntos de la figura a proyectar y encontrar los puntos de intersección de las rectas con el plano de proyección; la representación obtenida se denomina *proyección* de la figura en el plano dado.

Si la figura a proyectar es una circunferencia, su proyección será la línea de intersección del plano con una superficie compuesta por las rectas que pasan por el centro de proyección y los puntos de la circunferencia. La superficie mencionada se llama *cono circular*. El cono circular puede ser *recto*, si una perpendicular trazada desde el centro de proyección al plano de la circunferencia pasa por el centro de ésta, y *oblicuo*, en todos los demás casos. Las líneas de intersección de tal superficie con el plano, en general, no son circunferencias. Estas líneas se llaman *secciones cónicas* y, si el plano secante no pasa por el vértice del cono, se representan por las curvas de tres clases: 1. *Elipses*, si las líneas son cerradas; 2. *Parábolas*, si las líneas constan de una rama que se extiende al infinito; 3. *Hipérbolas*, si las líneas constan de dos ramas que se extienden al infinito (bajo el supuesto de que las rectas que unen el vértice del cono con la circunferencia dada son infinitas). Las circunferencias pueden considerarse como caso particular de las elipses.

Existe, sin embargo, una proyección muy singular para la cual las curcunferencias siempre aparecen en la proyección como circunferencias o líneas rectas. Tal proyección se obtendrá si consideramos sólo las circunferencias situadas en una cierta esfera (estas circunferencias son las líneas de intersección de la esfera con los planos), y además, como centro de proyección tomamos uno de los puntos de la misma esfera, y como plano de proyección, un plano que toca la esfera en el punto diametralmente opuesto o cualquier otro plano paralelo que no pase por el centro de proyección.

En el caso en que el plano de la circunferencia pasa por el centro de proyección, ésta se representará en la proyección como línea recta; en todos los casos restantes la circunferencia en la esfera se representa sobre el plano indicado como una circunferencia.

Esta proyección posee otra propiedad muy interesante: los ángulos formados por las líneas en la esfera se representan en la proyección por ángulos iguales a los primeros formados por las líneas en el plano. La tercera propiedad de la proyección mencionada consiste en lo siguiente: cuando una esfera se hace girar alrededor del diámetro que pasa por el centro de proyección, las representaciones planas de todas las figuras en la esfera giran en el mismo ángulo, alrededor del punto de intersección del plano con el diámetro de la esfera.

La proyección de este tipo, llamada *proyección estereográfica*, se utiliza con frecuencia en diferentes ramas de las matemáticas, como también en la astronomía, cristalografía y geografía.

El presente folleto está dedicado a la demostración de las propiedades citadas de la proyección estereográfica y a la exposición de algunas de sus aplicaciones. La obra se compone de ocho párrafos. En el párrafo 1 se da la definición de la proyección estereográfica y se demuestran sus principales propiedades. En el párrafo 2 se analiza la relación entre la proyección estereográfica y la admirable transformación de un plano en sí mismo, en la cual las circunferencias se transforman también en circunferencias o líneas rectas, mientras que los ángulos formados por las líneas, se transforman en ángulos equivalentes a los iniciales. Esta transformación se denomina *inversión respecto a la circunferencia*. Más adelante, se establece la relación entre la proyección estereográfica y una transformación análoga del espacio, es decir, *inversión respecto a la esfera*.

En el párrafo 3 se demuestran las principales propiedades de la proyección estereográfica con ayuda de coordenadas. En el párrafo 4 se establece la relación entre la proyección estereográfica y los números complejos: en el caso en que el plano de proyección se analice como un plano de variable compleja, la proyección estereográfica nos permite representar los números complejos por medio de los puntos de una esfera. Esta representación es de amplia aplicación en la teoría de funciones de variable compleja, puesto que el punto denominado infinitamente lejano del plano de variable compleja, que no tiene representación en el mismo plano, se representa en la esfera por el centro de proyección. En el mismo párrafo se estudia la métrica esférica en el plano, cuando se toma como distancia entre dos puntos en el plano la distancia esférica entre los puntos correspondientes en la esfera. Los números complejos permiten expresar la distancia esférica en la forma más sencilla. El párrafo 5 nos muestra las transformaciones del plano

por medio de las cuales se representan en la proyección estereográfica las revoluciones de la esfera. Estas transformaciones tienen su expresión más fácil también en números complejos. En el párrafo 6 se trata del desarrollo histórico de la noción de proyección estereográfica que surgió en la antigüedad y se utilizaba ampliamente en la Edad Media.

El párrafo 7 da las ilustraciones de la aplicación de la proyección estereográfica a la astronomía en la que la citada proyección sirvió de base para la construcción de los *astrolabios* medievales, y a la geografía — para levantar cartas de navegación.

En el párrafo 8 se define *el plano de Lobachevski* y se muestra cómo por medio de una singular proyección estereográfica se puede obtener la representación del plano de Lobachevski sobre un plano común. En esta representación las circunferencias y líneas rectas reproducen las circunferencias y algunas otras curvas del plano de Lobachevski, mientras que los ángulos formados por líneas del plano de Lobachevski se representan en el plano común por ángulos iguales.

El folleto está destinado a los alumnos de años superiores de la escuela y a los estudiantes de la enseñanza superior. Al leerlo por primera vez puede omitirse el material más difícil que viene en carácteres pequeños. Como base de la obra se han tomado las conferencias dictadas por los autores ante los escolares de Moscú.

§ 1.
DEFINICIÓN Y PROPIEDADES PRINCIPALES DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Se denomina *proyección estereográfica* una proyección de la esfera, desde uno de sus puntos S, al plano σ, que toca la esfera en el punto S', diametralmente opuesto al S (fig. 1). Las propiedades de esta proyección no cambian sustancialmente al sustituir el plano σ por cualquier otro plano paralelo a él y que no pase por el centro de la proyección. Con frecuencia se toma como plano de esta naturaleza el plano diametral de la esfera (será el plano ecuatorial de la esfera, si consideramos como polos de la esfera el centro de proyección y el punto diametralmente opuesto).

Demostremos las tres propiedades siguientes de la proyección estereográfica.

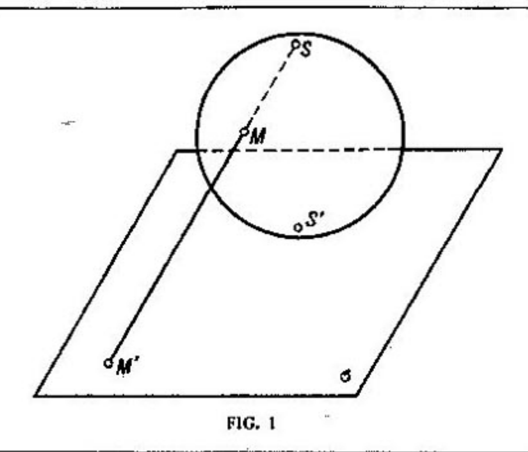


FIG. 1

A) *Las circunferencias pertenecientes a la esfera, al ser proyectadas sobre el plano σ, se representan como circunferencias; si las circunferencias situadas sobre la esfera pasan por el centro de proyección, se representan como rectas.*

Antes de proceder a la demostración de esta propiedad observemos que el paso desde cualquier punto M en la esfera hacia su proyección M' en el plano se realiza en algún plano que pasa por el diámetro SS' de la esfera.

Por esta circunstancia, consideremos inicialmente una proyección

estereográfica de la circunferencia sobre una recta, que se encuentra en uno de los planos indicados (fig. 2), y demostremos para este caso el siguiente lema:

Supongamos que en la proyección estereográfica de la circunferencia sobre una recta, los puntos M y N de la circunferencia se representan por los puntos M′ y N′ de la recta. Entonces: $\angle SMN = \angle SN'M'$ y $\angle SNM = \angle SM'N'$.

Efectivamente, los triángulos rectangulares SMS' y $SS'M'$ son semejantes y tienen el ángulo agudo MSS' como el común; por lo tanto: $\frac{SM}{SS'} = \frac{SS'}{SM'}$, es decir, $SM \cdot SM' = (SS')^2$.

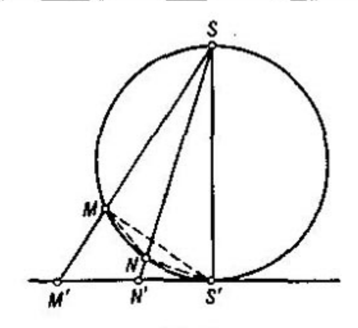


FIG. 2

De esta misma manera, considerando los triángulos SNS' y $SS'N'$ con ángulo agudo NSS' común, encontramos que $SN \cdot SN' = (SS')^2$. Comparando las igualdades obtenidas llegamos a la conclusión de que:

$$SM \cdot SN' = SN \cdot SN', \tag{1}$$

de donde:

$$\frac{SM}{SN'} = \frac{SN}{SM'} \cdots \tag{2}$$

De la proporción (2) se deduce que los triángulos SMN y $SN'M'$ que tienen el ángulo agudo MSN común, son semejantes; además, los ángulos $\angle SMN$ y $\angle SNM$ del triángulo SMN son iguales respectivamente a los ángulos $\angle SN'M'$ y $\angle SM'N'$ del triángulo $SN'M'$.

Ahora, demostremos la propiedad A) de la proyección estereográfica. Si una circunferencia de la esfera pasa por el punto S, entonces se halla en el plano que pasa por el mismo punto, y su proyección desde el punto S al plano σ es la línea de intersección de ambos planos, es decir, una línea recta. Si la circunferencia en la esfera no pasa por el punto S, se puede considerar que el plano que pasa por la recta SS' y el centro de la circunferencia, es el plano representado en la fig. 2, mientras que el segmento MN es el diámetro de la circunferencia dispuesto en el plano. En este caso las líneas que proyectan los puntos de la circunferencia son generatrices rectilíneas de un cono circular oblicuo con vértice en el punto S.

Mientras un cono circular recto posee una sola familia de secciones circulares, es decir, las secciones formadas por los planos paralelos a su base, un cono circular oblicuo tiene dos familias de esta especie. Una de ellas está formada por las secciones mediante

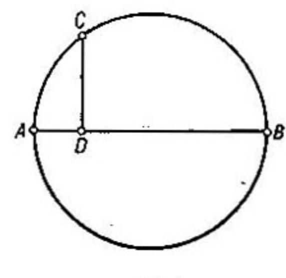


FIG. 3

planos paralelos a la base del cono. Para obtener otra familia de secciones circulares del cono circular oblicuo recordemos que, al bajar la perpendicular CD desde el punto arbitrario C al diámetro AB de la circunferencia (fig. 3) se cumple la igualdad

$$AD \cdot BD = CD^2 \ldots \tag{3}$$

y, recíprocamente, si se cumple la igualdad (3) para cualquier punto C de una curva y alguna recta AB, la curva es una circunferencia o una parte de ella.

Consideremos, ahora, un cono circular oblicuo de vértice A y con base cuyo diámetro es el segmento BC. Supondremos que la recta BC pasa por la base de una perpendicular trazada desde

el vértice del cono hasta su base (fig. 4). Hagamos que se intersequen el cono y un plano que sea perpendicular al plano ABC y le corte a éste a lo largo de la recta HK tal que los puntos H y K se hallen en la superficie del cono y $\angle AHK = \angle ACB$ y, además, $\angle AKH = \angle ABC$. Este plano cortará la superficie del cono por la curva HJK. Demostremos que la curva HJK es una circunferencia. Con este fin examinemos un punto arbitrario J de la curva y un punto cualquiera L en la circunferencia de la base del cono, trazemos las perpendiculares JG y LM al plano ABC. Por supuesto, las rectas JM y LM, que son perpendiculares a un mismo plano, son paralelas. Tracemos una recta DGE (por el punto G), paralela a la recta BC, y un plano que pase por las rectas DE y JG. Dado que la recta DE es paralela a la recta BC, mientras que

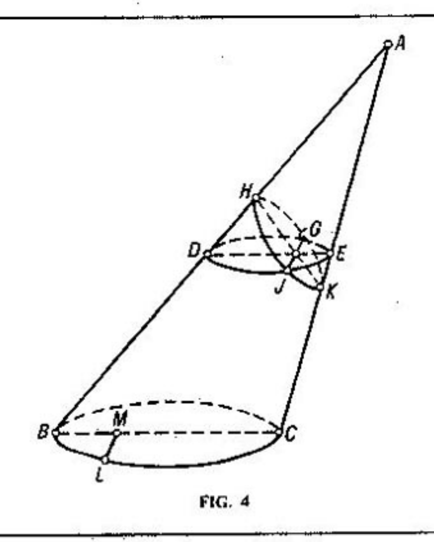


FIG. 4

la recta JG es paralela a LM, entonces el plano trazado será paralelo al plano de la base del cono y, al cortar el cono, forma una sección circular. Pero, debido a la propiedad (3), para la sección circular obtenida se cumple la igualdad

$$DG \cdot GE = JG^2 \ldots \qquad (4)$$

Por otra parte, como $\angle AHK = \angle ACB$ el cual a causa del paralelismo de las rectas DE y BC, es igual al ángulo AED, y como,

por la misma razón, $\angle AKH = \angle ABC = \angle ADE$, entonces $\angle HDG = \angle EKG$ y $\angle DHG = \angle KEG$. Por eso, los triángulos EGK y HGD, que tienen ángulos iguales en sus vértices, son semejantes.

Por la semejanza de estos triángulos se cumple la proporción

$$\frac{HG}{GD} = \frac{EG}{GK},$$

de donde

$$DG \cdot GE = HG \cdot GK,$$

es decir, de la igualdad (4) tenemos:

$$HG \cdot GK = JG^2. \qquad (5)$$

Ya que la igualdad (5) tiene la misma forma que la (3) y tiene lugar para cualquier punto de la curva HJK y de la recta HK, resulta que la curva HJK es una circunferencia. Como la misma propiedad la posee una sección del cono, obtenida al cortarlo por un plano cualquiera, paralelo al plano HJK, hemos determinado, por consiguiente, la segunda familia de secciones circulares del cono circular oblicuo.

Ya que en la fig. 2 los triángulos $SM'N'$ y SNM están dispuestos de un modo igual que los triángulos ABC y AHK en la fig. 4, entonces, de la igualdad de ángulos de los triángulos $SM'N'$ y SNM se deduce que una sección del cono circular oblicuo, obtenida al cortar el cono por un plano que toca la esfera en el punto S', es una circunferencia de diámetro $M'N'$ (de generatrices rectilíneas del cono sirven las rectas que hacen la proyección de la circunferencia de diámetro MN en la esfera). Así queda demostrada la propiedad A).

La existencia, en un cono circular oblicuo, de dos familias de secciones circulares puede ser demostrada usando otro método, esto es, por medio de plano de simetría de este cono. Suele decirse que una figura es simétrica respecto al plano α (fig. 5), si para un punto A de la figura se encuentra otro punto, A', de la misma figura que es una reflexión especular con relación al plano α. En otras palabras, el punto A' se encuentra en una perpendicular, trazada sobre el plano α desde el punto A, a la misma distancia de α que el punto A, mas por otro lado del plano α. En el caso de un cono recto circular, cualquier plano que pasa por el eje de éste, es un plano de simetría. Se puede demostrar que para el cono oblicuo, expuesto en la fig. 4, uno de los planos de simetría es el plano ABC que pasa por la recta que une el vértice del cono con el centro de la base, y por una perpendicular bajada del vértice a la base.

Este plano corta el cono a lo largo de dos generatrices. La bisectriz del ángulo formado por las generatrices se denomina eje del cono oblicuo (al que suponemos extendido hasta ∞). El segundo plano de simetría del cono oblicuo es un plano que pasa por el eje del cono perpendicularmente al primer plano. Al reflejarse de éste, todas las secciones circulares del cono se convierten en sí mismas al reflejarse del segundo plano, las secciones de la primera familia se transforman en secciones circulares de la segunda y viceversa. La presencia en el cono circular oblicuo de dos planos de simetría, mutuamente perpendiculares, indica que al cortar el cono por un plano perpendicular a su eje, obtendremos una curva, cuyos ejes de simetría son mutuamente perpendiculares, es decir, una elipse, que puede obtenerse a partir de una circunferencia, al comprimirla en dirección a uno de sus diámetros. En la fig. 6 aparece la elipse $ABCD$, obtenida por compresión de la circunferencia $AB'CD'$ hacia su diámetro AC. La figura 7 nos muestra dos secciones del cono circular oblicuo del diámetro de base MN:

1) una sección circular de diámetro $M'N'$, y
2) una sección que tiene forma de elipse; el segmento M^0N^0 es uno de sus ejes.

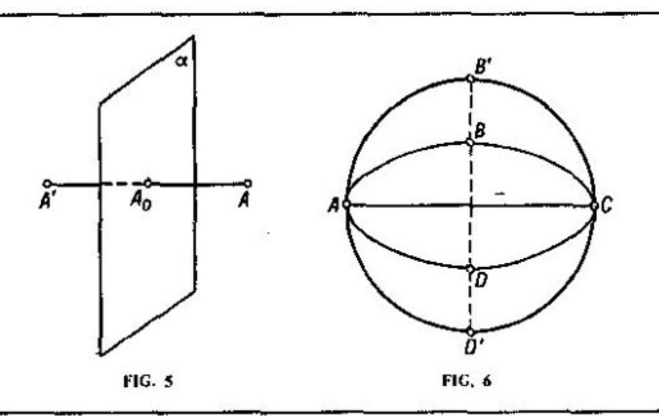


FIG. 5 FIG. 6

Debe señalarse que cualquier circunferencia o recta en el plano σ es la proyección de cierta circunferencia en la esfera: cada recta es una proyección de la circunferencia obtenida al cortar la esfera por un plano que pasa por esta recta y el centro de proyección; cada circunferencia en el plano σ es una circunferencia de la base de cierto cono circular oblicuo con vértice en el centro de proyección.

Razonando de modo igual que en el caso A), se puede demostrar que la línea por la cual la superficie del cono se interseca con una esfera, es una circunferencia de sección circular perteneciente

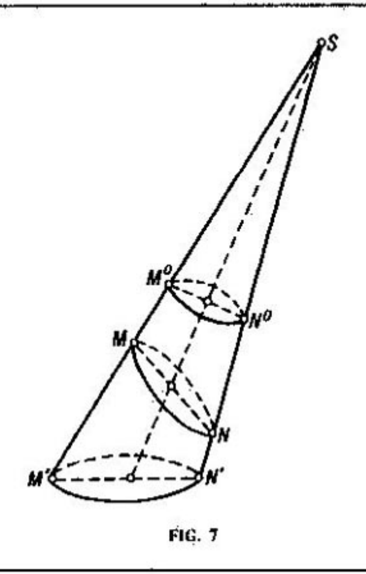


FIG. 7

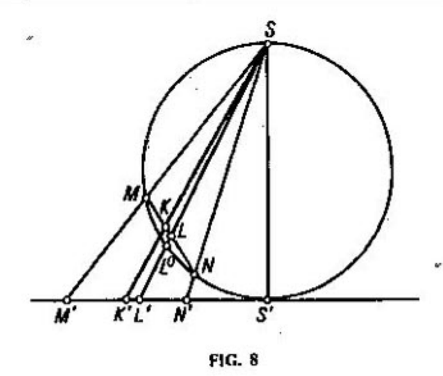


FIG. 8

a la familia de secciones circulares del cono que no son paralelas a la base. Por consiguiente, toda circunferencia en el plano σ es una proyección de la circunferencia de la esfera que se obtiene, al intersecarse la esfera y el cono determinado por la circunferencia en el plano σ.

Observemos también que, al efectuarse una proyección estereográfica, el centro de la circunferencia de diámetro MN no se

transforma en el centro de la circunferencia de diámetro $M'N'$. Efectivamente, sean: L, centro del diámetro MN, y L', proyección de L en el plano (fig. 8).

Ya que la recta SL no es perpendicular a la cuerda MN, entonces dividirá el arco MN en dos partes desiguales, ML^0 y L^0N, siendo $ML^0 > L^0N$. Por ello, $\angle MSL > \angle LSN$. Tracemos una recta SK que forma con SM el ángulo MSK, igual al $\angle LSN$. Esta recta corta la recta $M'N'$ en el punto K'. En los triángulos $SM'K'$ y SNL los ángulos S son iguales por construcción, mientras que los ángulos M' y N son iguales según lo demostrado anteriormente. Por consiguiente, los triángulos indicados son semejantes y se cumple la proporción: $\frac{SN}{SM'} = \frac{NL}{M'K'}$. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos SCN y $SN'M'$ se deduce la proporción $\frac{SN}{SM'} = \frac{MN}{M'N'}$, por lo que tiene lugar las proporciones $\frac{NL}{M'K'} = \frac{MN}{M'N'}$ y $\frac{NL}{MN} = \frac{M'K'}{M'N'}$. Pero, $NL = \frac{1}{2}MN$, por consiguiente, $M'K' = \frac{1}{2}M'N'$, es decir, el punto K' es el centro del diámetro $M'N'$. Por esto, el centro K' del círculo con diámetro $M'N'$ no es una proyección del centro L del círculo con diámetro MN, sino del punto K de este diámetro para el cual $\angle MSK = \angle LSN$.

Demostremos la segunda propiedad de la proyección estereográfica.

B) *En la proyección estereográfica, los ángulos formados por las curvas de una esfera, son representados por ángulos iguales, formados por las curvas proyectadas sobre el plano* σ.

Como ángulo formado por curvas, se considera el ángulo formado por las tangentes a las curvas en el punto de su intersección. Tracemos dos curvas por el punto M de la esfera. Supongamos que las tangentes a las curvas en el punto M intersecan el plano π que toca la esfera en el punto S, en K y L (fig. 9). Unamos los puntos K y L con S. Entonces, $KM = KS$ como dos tangentes a la esfera, trazadas desde un mismo punto; por la misma razón $LM = LS$. Por ello, en los triángulos KLM y KLS, que tienen un lado KL común, todos los lados son respectivamente iguales. De aquí proviene la igualdad de ángulos de los triángulos indicados y, en particular, la igualdad $\angle KML = \angle KSL$. En la proyección, las curvas elegidas tendrán la forma de dos curvas

que parten del punto M'; el ángulo formado por ellas es igual al ángulo formado por las tangentes. Las tangentes $M'K'$ y $M'L'$ son proyecciones de las tangentes MK y ML y, por consiguiente, líneas de intersección de los planos SKM y SLM con el plano de proyección σ. Pero, los planos SKM y SLM cortan el plano π, paralelo al plano de proyección σ, a lo largo de las rectas SK y SL. Por esto, las rectas $M'K'$ y $M'L'$ son respectivamente paralelas a SK y SL, y además, $\angle K'M'L' = \angle KSL$. Como $\angle KSL = \angle KML$, resulta que $\angle K'M'L' = \angle KML$. La propiedad B) queda así demostrada.

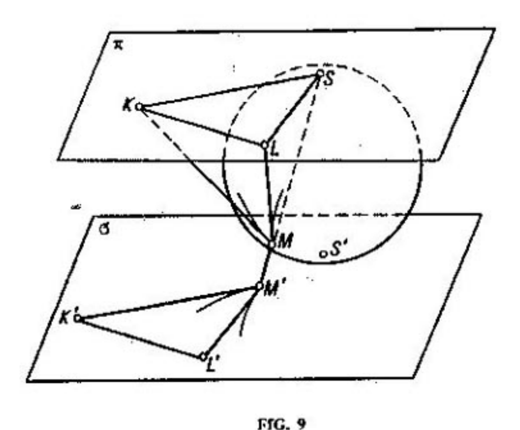


FIG. 9

La tercera propiedad de la proyección estereográfica consiste en lo siguiente:

C) *Cuando la esfera gira alrededor del diámetro que pasa por el polo, en el plano σ también tiene lugar el giro en un mismo ángulo, alrededor del punto donde se tocan la esfera y el plano.*

Esta propiedad se deduce inmediatamente del hecho de que la conversión de cualquier punto M en su proyección M' sobre el plano σ se realiza en un cierto plano que pasa por el diámetro SS'. Al girar la esfera un ángulo φ, la línea de intersección del plano dado con el de proyección girará un ángulo igual.

§ 2.
PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA E INVERSIÓN

En una proyección estereográfica los puntos diametralmente opuestos de una esfera se representan en el plano σ mediante ciertos puntos. Trataremos de encontrarlos. Supongamos que M y N son los puntos de la esfera, diametralmente opuestos, y se representan en la proyección sobre el plano σ por las puntos M' y N' (fig. 10). Mostremos que, al designar por R el radio de la esfera, tenemos

$$S'M' \cdot S'N' = 4R^2. \tag{6}$$

En efecto, el ángulo MSN que descansa sobre el diámetro MN de la circunferencia, es recto. Por ello, el ángulo S en el triángulo

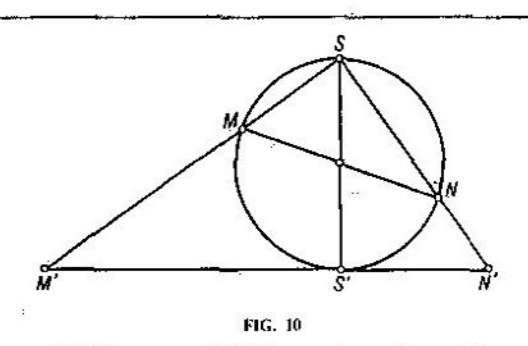


FIG. 10

$M'SN'$ es también recto. Dado que SS' es la altura del triángulo rectangular $M'SN'$, se cumple la igualdad

$$S'M' \cdot S'N' = (SS')^2.$$

Sustituyendo SS' en esta igualdad por $2R$, obtenemos la correlación (6).

Siendo M' un punto arbitrario en el plano σ, distinto del punto S', podemos encontrar cierto punto N' en el mismo plano que correspondería al punto M'. Para ello, unamos los puntos M' y S, encontremos el punto M de intersección de la recta $M'S$ con la esfera, hallemos después el punto N de la esfera que sería diametralmente opuesto al punto M, y al efectuar la proyección del punto N en el plano σ, tendremos el punto N'. Hemos obtenido una transformación del plano que pone en correspon-

dencia a cualquier punto M' del plano, distinto del punto S', un cierto punto N' del mismo plano.

Señalemos que la transformación indicada se relaciona estrechamente con otra transformación conocida del plano, llamada *inversión* respecto a la circunferencia. Supongamos que en un plano se ha dado una circunferencia con centro en M_0 y radio R (fig. 11). Se llama *inversión* respecto a la circunferencia una transformación del plano en la que cualquier punto M del plano,

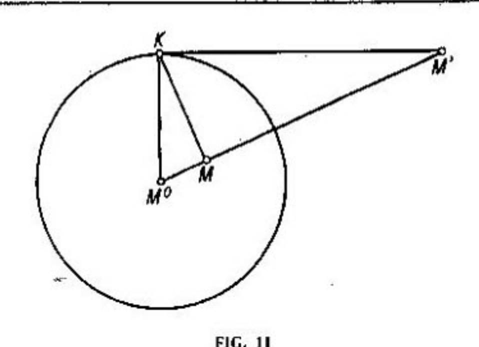


FIG. 11

diferente de M_0, se transforma en el punto M' (en la recta M_0M, por el mismo lado de M_0 que M) tal que se cumpla la igualdad

$$M_0M \cdot M_0M' = R^2. \tag{7}$$

En la inversión, todos los puntos situados dentro de la circunferencia se convierten en puntos fuera de la misma, y viceversa. Los puntos, pertenecientes a la propia circunferencia, se transforman en sí mismos.[1]

La transformación considerada, en donde los puntos M' del plano σ distintos del punto S', pasan a ser N', es distinta a la inversión respecto a una circunferencia con el centro en S' y radio $2R$. La diferencia consiste en que el punto N' se encuentra en la recta $M'S'$ a una distancia determinada según la correlación (6), pero no por el mismo lado (con relación al punto S') que el punto M'. Esta transformación puede representarse como una

[1] Para una información más detallada acerca del fenómeno de inversión, el lector puede acudir al folleto "Inversión" por I. Ya. Bakelman.

realización consecutiva (en cualquier orden) de la inversión indicada y de la reflexión del punto S'. De aquí proviene que la inversión respecto a cualquier circunferencia de un plano con centro en M_0 y radio R puede representarse como realización consecutiva de cuatro transformaciones:

– transformación, recíproca a la proyección estereográfica respecto a una esfera de radio $R/2$ que toca el plano en el punto M_0. En esta transformación el punto M del plano σ se convierte en un punto de la esfera;

– paso desde esta esfera a un punto diametralmente opuesto de la misma;

– realización de la proyección esfereográfica del punto obtenido de la esfera sobre el plano σ;

– obtención de la reflexión del punto encontrado en el plano σ del punto M_0.

Ya que en virtud de la propiedad A) de la proyección estereográfica las circunferencias de una esfera, al ser proyectadas sobre el plano σ, aparecen en forma de circunferencias y rectas, y viceversa, cada circunferencia o recta en el plano σ es la proyección de cierta circunferencia en la esfera. Pero, al pasar a los puntos diametralmente opuestos de la esfera (es decir, cuando la esfera se refleja de su centro) las circunferencias en la esfera se transforman en circunferencias, mientras que cuando el plano se refleja de un punto, las circunferencias y rectas aparecen en forma de circunferencias y rectas. A consecuencia de lo enunciado, nuestra representación de la inversión como resultado de la realización consecutiva de las cuatro transformaciones indicadas nos lleva a la conclusión de que la inversión posee la siguiente propiedad:

A') *En la realización de una inversión las circunferencias y rectas se transforman en circunferencias y rectas.*

No es difícil convencerse de que en una inversión las circunferencias y rectas se transforman en circunferencias y rectas cuando y sólo cuando ellas pasan por el punto M_0.

Igualmente, en virtud de la propiedad B) de la proyección estereográfica, los ángulos formados por curvas en la esfera se representan por ángulos iguales, formados por las curvas en el plano σ. Si una esfera o un plano son reflejadas, respectivamente, del centro o de un punto, los ángulos formados por las curvas en la esfera o el plano también se representan por ángulos iguales a los primeros y formados por curvas en la esfera o en el plano. Así, de nuestra representación de la inversión como resultado

de la realización consecutiva de cuatro transformaciones se deduce que la inversión posee también la propiedad

B′) *En la realización de una inversión los ángulos formados por las curvas se expresan por ángulos iguales formados por curvas transformadas.*

Los resultados de la realización consecutiva de una inversión con relación a la circunferencia de radio R y centro en el punto M_0, y de la reflexión de un plano de algún punto (debido a las causas sobre las cuales trataremos más abajo, en el § 4) se denominan *inversión* respecto a una circunferencia imaginaria de radio imaginario iR y centro en M_0.

Observemos que de un modo totalmente igual a la inversión respecto a una circunferencia en el plano se puede definir en el espacio *la inversión respecto a una esfera* de radio R y centro en M_0, es decir, la transformación del espacio para la cual cada punto M en el espacio, distinto del punto M_0, se convierte en el punto M' (situado en la recta M_0M por el mismo lado con relación a M_0 que el punto M) tal que se cumple la correlación (7). Se puede demostrar que la inversión respecto a una esfera en el espacio tiene las mismas propiedades A′) y B′) que la inversión respecto a una circunferencia en el plano y además, una propiedad semejante a la A′)

A″) *En la inversión las esferas y los planos se transforman, respectivamente, en esfera y planos.*

No es difícil convencerse de que en la inversión respecto a una esfera las circunferencias y rectas se transforman en rectas; las esferas y los planos en la misma inversión se convierten en planos en un solo caso, es decir, cuando ellos pasan por el punto M_0.

Existe una vinculación singular entre la proyección estereográfica e inversión respecto a una esfera. Esta vinculación consiste en lo siguiente: *si realizamos la inversión respecto a una esfera de radio SS' y centro en el punto S, la esfera de diámetro SS' se convertirá en el plano σ, que toca ambas esferas en el punto S'; la reflexión obtenida de la esfera en el plano σ coincide con la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano* σ (fig. 12).

Efectivamente, en el párrafo 1 hemos encontrado que para todo punto M de la esfera que es proyectada sobre el plano σ, y para el punto M' en el plano σ, correspondiente a M', se cumple la correlación

$$SM \cdot SM' = (SS')^2.$$

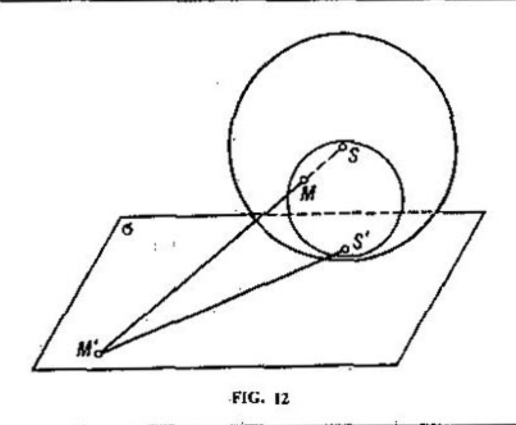


FIG. 12

Esta correlación atestigua que el punto M' del plano se obtiene del punto M por medio de una inversión respecto a la esfera de radio SS' y centro en el punto S.

§ 3.

DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA MEDIANTE EL MÉTODO DE COORDENADAS

Para los lectores que conocen el método de coordenadas presentamos la demostración de las propiedades de la proyección estereográfica por medio de coordenadas (el contenido del párrafo puede ser omitido sin perjuicio para la comprensión de los temas siguientes). Imaginemos un sistema de coordenadas rectangulares X, Y, Z en el espacio y recordemos que la distancia d entre los puntos $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ y $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$ puede ser determinada según la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}. \qquad (8)$$

Para el ángulo φ formado por los segmentos dirigidos (vectores) $\overline{OM}_1$ y $\overline{OM}_2$, que parten del origen de coordenadas O, se emplea la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \qquad (9)$$

Examinemos la proyección estereográfica de una esfera de radio 1 y centro en el origen de coordenadas O. La proyección se efectúa del punto S (en el eje OZ) sobre el plano σ que toca la esfera en el punto diametralmente opuesto a S. En este caso, la ecuación de la esfera tiene la forma

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad (10)$$

Las coordenadas del punto S son 0, 0, 1, y el plano σ de la proyección es el plano $Z = -1$. Supongamos que el punto $M(X, Y, Z)$ de la esfera, al ser proyectado estereográficamente, se transforma en el punto $M'(x, y, -1)$ del plano. Encontremos la relación que existe entre las coordenadas x, y del punto M', y las coordenadas X, Y, Z del punto M. Como los puntos S, M y M' se hallan en una misma recta, los vectores $\overline{SM}$ y $\overline{SM'}$ están orientados en dirección a una misma recta y, por consiguiente, las diferencias en coordenadas $(X, Y, Z - 1)$ de los puntos S, M y $(x, y, -2)$ de los puntos S, M' son proporcionales:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{1 - Z}{2} = k.$$

Por lo tanto:

$$X = kx, \quad Y = ky, \quad Z = 1 - 2k.$$

Dado que las coordenadas X, Y, Z satisfacen la ecuación (10) de la esfera, encontramos que

$$k^2(x^2 + y^2) + (1 - 2k)^2 = 1$$

ó

$$k^2(x^2 + y^2 + 4) - 4k = 0. \qquad (11)$$

Los valores de k que satisfacen la condición (11), corresponden a los puntos de intersección de la recta SM con la esfera: el valor $k = 0$ corresponde al punto S, y el valor

$$k = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4}$$

corresponde al punto M. Por eso, las coordenadas de M, correspondientes al punto M', son:

$$X = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \quad Y = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4}. \qquad (12)$$

Ahora usando el método de coordenadas, demostraremos las propiedades de la proyección estereográfica.

A) Dado que las circunferencias se obtienen al cortar la esfera por unos planos, es evidente que las coordenadas de los puntos en las circunferencias están subordinadas a las mismas condiciones que las coordenadas de los puntos de los planos, es decir, se determinan por las ecuaciones de éstos. Examinemos un plano que se define por la ecuación

$$AX + BY + CZ + D = 0, \qquad (13)$$

y encontremos el lugar geométrico de los puntos del plano, correspondientes a los puntos en que se intersecan el plano (13) y la esfera (10). Con este fin sustituyamos los valores X, Y, Z de la fórmula (12) en la ecuación (13).

Vemos que las coordenadas (x, y) de los puntos del lugar geométrico satisfacen la condición

$$A\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4} + B\frac{4y}{x^2 + y^2 + 4} + C\frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} + D = 0,$$

lo que se puede escribir en la forma

$$4Ax + 4By + C(x^2 + y^2 - 4) + D(x^2 + y^2 + 4) = 0,$$

ó

$$(C + D)(x^2 + y^2) + 4Ax + 4By + 4(D - C) = 0. \qquad (14)$$

Sustituyendo las coordenadas del punto S en la ecuación (13) obtenemos la condición $C + D = 0$, la cual es necesaria y suficiente para que el plano (13) pase por el punto S. Por consiguiente, si el plano (13) no pasa por el punto S, $C + D \neq 0$ y la ecuación (14) es la ecuación de una circunferencia. Si el plano (13) pasa por el punto S, entonces $C + D = 0$ y la ecuación (14) es la de una recta.

B) La demostración de esta propiedad con ayuda del método de coordenadas requiere que el lector esté familiarizado con el cálculo diferencial. El ángulo formado por dos curvas en la esfera es igual al ángulo formado por las tangentes a estas curvas en el punto de su intersección y, por consiguiente, al ángulo formado por dos vectores dirigidos a lo largo de estas tangentes. Si las coordenadas del punto M las utilizamos como coordenadas del vector $\overline{OM}$, entonces puede tomarse

como vector dirigido según una tangente a la curva en el punto $M(X, Y, Z)$ el vector cuyas coordenadas son las diferenciales dX, dY, dZ de las coordenadas del punto M.

Designemos: por $\{dX, dY, dZ\}$ el vector dirigido según la tangente a una de las dos curvas en la esfera; y por $\{\delta X, \delta Y, \delta Z\}$, el vector, dirigido según la tangente a la otra de las curvas indicadas.

En virtud de (9), el ángulo Φ formado por estos dos vectores y, por consiguiente, por las curvas, se determina según la fórmula

$$\cos\Phi = \frac{dX\,\delta X + dY\,\delta Y + dZ\,\delta Z}{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}\sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2}}. \qquad (15)$$

El ángulo φ, formado por dos curvas en el plano, que se obtienen proyectándolas en la esfera, es igual al ángulo formado por dos vectores $\{dx, dy\}$ y $\{\delta x, \delta y\}$, es decir,

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \qquad (16)$$

Derivando las fórmulas (12) encontraremos las diferenciales dX, dY, dZ. Estas diferenciales son, respectivamente:

$$dX = \frac{(x^2 + y^2 + 4)\cdot 4dx - 2(xdx + y\,dy)\cdot 4x}{(x^2 + y^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{4(y^2 - x^2 + 4)\,dx - 8xy\,dy}{(x^2 + y^2 + 4)^2},$$

$$dY = \frac{(x^2 + y^2 + 4)\cdot 4dy - 2(x\,dx + y\,dy)\cdot 4y}{(x^2 + y^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{4(x^2 - y^2 + 4)\,dy - 8xy\,dx}{(x^2 + y^2 + 4)^2},$$

$$dZ = \frac{(x^2 + y^2 + 4)\cdot 2(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2 - 4)\cdot 2(x\,dx + y\,dy)}{(x^2 + y^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{16(x\,dx + y\,dy)}{(x^2 + y^2 + 4)^2}.$$

Sustituyendo estas diferenciales en las expresiones para el numerador y los factores del denominador de la fórmula (15), obtenemos:

$$dX\,\delta X + dY\,\delta Y + dZ\,\delta Z = \frac{16(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{(x^2 + y^2 + 4)^2},$$

$$\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2} = \frac{4\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2 + 4},$$

$$\sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2} = \frac{4\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{x^2 + y^2 + 4}.$$

Por ello:

$$\cos \Phi = \frac{dX\,\delta X + dY\delta Y + dZ\,\delta Z}{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}\sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2}} =$$

$$= \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}} = \cos \varphi \qquad (17)$$

y, por lo tanto, el ángulo Φ, formado por las curvas en la esfera es igual al ángulo φ, formado por las curvas correspondientes en el plano σ.

C) El giro de la esfera alrededor del eje OZ se puede escribir en la forma:

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\Phi - Y\operatorname{sen}\Phi, \\ Y' &= X\operatorname{sen}\Phi + Y\cos\Phi, \\ Z' &= Z. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

El giro del plano alrededor del origen de coordenadas se expresa así:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\operatorname{sen}\varphi, \\ y' &= x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

En virtud de la correlación

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

(que se comprueba de una manera muy fácil), las coordenadas de un punto de la esfera que corresponde al punto del plano de coordenadas x', y', -1 serán:

$$X' = \frac{4\,(x\cos\varphi - y\operatorname{sen}\varphi)}{x^2 + y^2 + 4} = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi,$$

$$Y' = \frac{4\,(x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi)}{x^2 + y^2 + 4} = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi,$$

$$Z' = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} = Z,$$

es decir, coinciden con las coordenadas (18) cuando $\Phi = \varphi$, de lo que se deduce que nuestra afirmación es correcta.

§ 4.

MÉTRICA ESFÉRICA EN EL PLANO. APLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Además de la distancia común entre dos puntos de un plano, se pueden determinar también otras distancias, definidas según ciertas leyes, llamadas *métricas* del plano (la palabra métrica se proviene de la palabra griega "metreo" que significa "mido").

En particular, haciendo proyectar la esfera sobre un plano, podemos trasladar a este último la métrica de la esfera, si tomamos como distancia $M'N'$ del plano la distancia entre los puntos correspondientes M y N de la esfera, llamada distancia esférica y medida a lo largo de la gran circunferencia de la esfera. En el caso en que r sea el radio de la esfera la distancia esférica entre los puntos M y N es igual al ángulo MON (formado por los radios OM y ON de la esfera) multiplicado por r. Cuando $r = 1$, la distancia esférica es igual al propio ángulo MON.

La proyección estereográfica establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano σ y los de la esfera, siendo excluido de ésta el punto S.

Con el fin de obtener la correspondencia biunívoca entre el plano σ y la esfera se debe completar el plano σ con un punto que consideraremos correspondiente al punto S de la esfera.

Cuando el punto de la esfera se aproxima a S, el punto correspondiente del plano se aleja hacia el infinito, razón por la cual el punto añadido se denomina *punto infinitamente lejano*. Designémoslo por el símbolo ∞.

La distancia esférica ω entre los puntos M y N en la esfera (10) de radio unitario y coordenadas X, Y, Z y X', Y', Z' es igual al ángulo, formado por radios OM y ON, es decir:

$$\cos\omega = XX' + YY' + ZZ'. \tag{20}$$

Sustituyendo X, Y, Z por sus expresiones (12), a través de las coordenadas x, y del punto en el plano, y las X', Y', Z', por la expresión análoga (a través de x', y'), encontramos que la distancia ω puede ser expresada mediante las coordenadas x, y y x', y' según la fórmula

$$\cos\omega = \frac{16\,(xx' + yy') + (x^2 + y^2 - 4)(x'^2 + y'^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4)(x'^2 + y'^2 + 4)} \tag{21}$$

o sea

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1 + \cos\omega}{2} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 + 4)(x'^2 + y'^2 + 4) + 16\,(xx' + yy') + (x^2 + y^2 - 4)(x'^2 + y'^2 - 4)}{2\,(x^2 + y^2 + 4)(x'^2 + y'^2 + 4)},$$

es decir,

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) + 8\,(xx' + yy') + 16}{(x^2 + y^2 + 4)(x'^2 + y'^2 + 4)}. \tag{22}$$

Las fórmulas (12) y (22) pueden ser simplificadas, si consideramos el plano σ, completado por el punto infinitamente lejano ∞, como plano

de una variable compleja, es decir, para cualquier punto $M(x, y)$ del plano σ encontraremos un número complejo correspondiente

$$z = x + iy.$$

Sustituyendo x e y por $\frac{z + \bar{z}}{2}$ y $\frac{z - \bar{z}}{2i}$ (donde $\bar{z} = x - iy$), podemos escribir las fórmulas (12) así:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2(z + \bar{z})}{z\bar{z} + 4}, \\ Y &= \frac{2(z - \bar{z})}{i(z\bar{z} + 4)}, \\ Z &= \frac{z\bar{z} - 4}{z\bar{z} + 4}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

y la fórmula (22)

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(z\bar{z}' + 4)(z'\bar{z} + 4)}{(z\bar{z} + 4)(z'\bar{z} + 4)}. \tag{24}$$

Encontremos, ahora, los puntos del plano σ, por cuyo intermedio son expresados en la proyección estereográfica los puntos diametralmente opuestos de la esfera. Si los puntos M y M' de la esfera (10) son diametralmente opuestos, la distancia esférica ω entre ellos es igual a π, y entonces $\cos \frac{\omega}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. En este caso, el numerador de la expresión (24), siendo igual a $|z\bar{z}' + 4|^2$, es cero, es decir,

$$z\bar{z}' + 4 = 0,$$

y, por consiguiente,

$$z' = -\frac{4}{\bar{z}}. \tag{25}$$

Haciendo uso de números complejos escribamos la inversión respecto a la circunferencia de radio R y centro en M_0. Si los puntos M_0, M y M' se determinan por medio de los números complejos z_0, z y z', la condición (7) puede escribirse en la forma

$$|z - z_0| \cdot |z' - z_0| = R^2.$$

Y debido a que los vectores $\overline{M_0M}$ y $\overline{M_0M'}$ están dirigidos a lo largo de una misma recta y se diferencian sólo en un factor positivo, la última correlación se cumple también para los números complejos, $z - z_0$ y $z' - z_0$, que les expresan, es decir:

$$z' - z_0 = \frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|}(z - z_0) = \frac{R^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0) =$$
$$= \frac{R^2}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}(z - z_0) = \frac{R^2}{(\bar{z} - \bar{z}_0)},$$

o sea, la inversión que transforma los puntos M en los M', relacionados con los primeros por la condición (7), se puede escribir en números

complejos en la forma

$$z' - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \tag{26}$$

Por eso, la transformación (25) se compone de una inversión respecto a la circunferencia

$$z\bar{z} = 4 \tag{27}$$

de radio 2 y centro en el punto O y una reflexión $z' = -z$.

Como (25) puede considerarse como la transformación (26) en la que $z_0 = 0$ y $R^2 = -4$, entonces se denomina *inversión respecto a la circunferencia imaginaria*

$$z\bar{z} = -4 \tag{28}$$

de radio $2i$ y centro en el punto O.

Observemos que la circunferencia (27) es la representación de la circunferencia grande en la esfera que se obtiene al cortarla por un plano diametral, paralelo al plano de proyección, es decir, una representación del ecuador de la esfera, en el caso en que los puntos S y S' se toman por sus polos.

Ya que cada pareja de circunferencias grandes de la esfera se intersecan en los puntos diametralmente opuestos y, por otra parte, los puntos del ecuador de la esfera, diametralmente opuestos, se expresan en el plano por intermedio de los puntos diametralmente opuestos de la esfera (27), entonces las circunferencias grandes de la esfera se expresan en el plano por aquellas circunferencias o rectas que cortan la circunferencia (27) en los puntos también diametralmente opuestos.

Es sabido que la suma de los ángulos del triángulo esférico, es decir, del triángulo en la esfera, cuyos lados son constituidos por los arcos de las circunferencias grandes, es siempre mayor que π (se puede demostrar que el área del triángulo esférico es igual al producto del exceso, en el que la suma de sus ángulos supera a π, por el cuadrado del radio de la esfera). Ahora estamos en condiciones de convencernos de esto: dibujemos el triángulo esférico ABC en una proyección estereográfica (en la fig. 13 el lado AB de este triángulo está representado por un segmento del diámetro de la circunferencia (27); los lados AC y BC — por los arcos de las circunferencias que cortan la (27) en sus puntos diametralmente opuestos). En virtud de la propiedad B) de la proyección estereográfica los ángulos del triángulo ABC se representan en el plano en su dimensión natural. Unamos los vértices del triángulo en el plano por líneas rectas. La suma de los ángulos del triángulo rectangular obtenido en el plano es igual a π. En la figura 13 se ve claramente que la suma de los ángulos del triángulo esférico ABC es mayor que la suma de los ángulos del triángulo plano, es decir, es mayor que π.

Una circunferencia de radio R con el centro en el punto M_0 puede ser caracterizada por la ecuación

$$|z - z_0| = R$$

ó

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2. \tag{29}$$

Demostremos las propiedades A') y B') de la inversión respecto a una circunferencia, haciendo uso de los números complejos. Para ello consideremos la inversión

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}} \tag{30}$$

respecto a la circunferencia

$$z\bar{z} = r^2 \tag{31}$$

con centro en el punto 0. Para demostrar la propiedad A') conviene escribir la ecuación (29) en la forma

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0 \tag{32}$$

(multiplicando los dos miembros de la ecuación (29) por A y haciendo

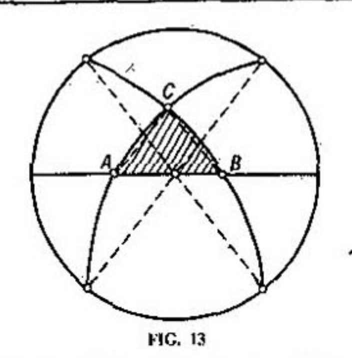


FIG. 13

$B = -Az_0$, $C = A(z_0\bar{z}_0 - R^2)$), y sustituir en ella z por su expresión a través de z' de la ecuación (30). Obtenemos que

$$\frac{Ar^4}{z'\bar{z}'} + \frac{Br^2}{z'} + \frac{\bar{B}r^2}{\bar{z}'} + C = 0,$$

es decir,

$$Cz'\bar{z}' + BR^2\bar{z}' + \bar{B}R^2z' + AR^4 = 0. \tag{33}$$

Cuando $C = 0$, la circunferencia o la recta pasan por el punto 0.

La propiedad B') se demuestra de manera análoga a la que ya hemos usado en el § 3 para la demostración de la propiedad B) por medio de coordenadas. La propiedad B') proviene también del hecho de que la inversión (26) es el resultado de la realización consecutiva de las transformaciones $z' = \bar{z}$ y

$$z'' - z_0 = \frac{R^2}{z' - z_0}. \tag{34}$$

Mas la transformación $z' = \bar{z}$ es la reflexión de un eje real en la que cada ángulo se transforma en un ángulo igual. En lo que se refiere a la

transformación (34) que es equivalente a la función

$$w = \frac{R^2}{z - z_0} + z_0, \tag{35}$$

observemos que quien está familiarizando con las funciones de variable compleja del curso de "Cálculo diferencial" sabe que la función indicada posee una derivada

$$\frac{dw}{dz} = \frac{R^2}{(z - z_0)^2};$$

Si designamos por k esta derivada, las diferenciales dz y dw estarán unidas por la correlación

$$dw = kdz. \tag{36}$$

Por eso, si dos curvas parten del punto $M(z)$, y las diferenciales a lo largo de ellas son dz y δz, estas curvas se transforman, al realizarse la inversión, en otras dos curvas, que parten del punto $M'(w)$, cuyas diferenciales son $dw = k\,dz$, $\delta w = k\,\delta z$. Pero, cuando $|a| = 1$, ó, en otras palabras, cuando $a = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$, la transformación

$$w = az \tag{37}$$

en el plano de una variable compleja es el giro en un ángulo φ (considerada en coordenadas, la transformación (37) tiene la forma de las ecuaciones (19)). Cuando $a = \bar{a} = r$, la misma transformación es una homotecia con el factor r. En el caso general la transformación (37) se compone del giro y de la homotecia. Por ello, sometiendo dz y δz a la transformación (37) para $a = k$, obtendremos una transformación que no cambia los ángulos y, por consiguiente, el ángulo formado por las diferenciales dw y δw es igual al ángulo formado por dz y δz.

Observemos que la inversión respecto a la circunferencia (32) puede escribirse en la forma

$$z' = \frac{B\bar{z} + C}{A\bar{z} + B}. \tag{38}$$

§ 5.

REPRESENTACIÓN DEL GIRO DE UNA ESFERA EN EL PLANO

De la propiedad C) de la proyección estereográfica se desprende que el giro de la esfera alrededor del diámetro SS' se representa en el plano σ por el giro (19), el cual, como hemos visto, puede escribirse mediante números complejos en la forma (37), si

$$a = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi.$$

Encontremos la transformación del plano, por cuyo intermedio se representa el giro arbitrario de la esfera. En este caso sus circunferencias se transforman también en circunferencias y debido a la propiedad A) de la proyección estereográfica las circunferencias en la esfera se expresan en el plano por circunferencias o líneas rectas, entonces los giros de la esfera se representan en el plano ampliado de variable compleja por medio de las transformaciones biunívocas del plano indicado que convierten las circunferencias en otras circunferencias o líneas rectas.

Entre las transformaciones mencionadas del plano se pueden indicar las transformaciones (37) y las transformaciones lineales más generales

$$w = az + b, \tag{39}$$

que se componen de las transformaciones (31) y los traslados

$$w = z + b,$$

así como también la reflexión $w = \bar{z}$ y las transformaciones más generales

$$w = a\bar{z} + b \tag{40}$$

que constan de las transformaciones lineales (39) y la reflexión $w = \bar{w}$.

A este grupo de transformaciones pertenecen también las inversiones respecto a circunferencias, las transformaciones (35) y las transformaciones lineales fraccionarias de tipo más general

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{41}$$

y

$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \tag{42}$$

que constan de las transformaciones lineales (39) y (40): y las inversiones o las transformaciones (35): el hecho de que la transformación (41) está formada por las transformaciones indicadas se comprueba al ser posible representarla en la forma

$$w = \frac{\frac{a}{c}cz + \frac{a}{c}d - \frac{a}{c}d + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)},$$

sustituyendo z por $\bar{z}$, obtendremos la misma representación de la transformación (42).

Se puede demostrar que, recíprocamente, cada transformación biunívoca del plano de una variable compleja complementado con el punto ∞ (en la cual las circunferencias se transforman en otras circunferencias o líneas rectas) tiene la forma (41) ó (42). Efectivamente, supongamos que la transformación T traslada el punto ∞ al punto S. Examinemos la inversión J respecto a una circunferencia con centro en S. Entonces la transformación U, que se compone de las dos transformaciones mencionadas, hace trasladar el punto ∞ a sí mismo y, por consiguiente, transforma las líneas rectas en otras rectas. Tomemos por conocido que cualquier transformación biunívoca del plano que convierte las líneas rectas en otras rectas (transformaciones de este tipo se llaman *afines*) se puede escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} x' &= Ax + By + E, \\ y' &= Cx + Dy + F. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Como, además, la transformación U convierte las circunferencias en otras circunferencias, es en realidad una semejanza, es decir, consiste de un movimiento y una homotecia y, por consiguiente, puede expresarse en el plano de una variable compleja en la forma (39) ó (40). Por ello, la transformación T, compuesta por la transformación U y la inversia J, consiste de la transformación (39) ó (40) y la inversión (38) y, por lo tanto, tiene la forma (41) ó (42).

Por esta razón, en la proyección estereográfica de una esfera en el plano el giro de ésta se expresa por las transformaciones del tipo (41) ó (42). Ya que, al girar la esfera sus puntos diametralmente opuestos se convierten en puntos de la misma naturaleza y en la proyección estereográfica los puntos mencionados se representan por medio de puntos relacionados mediante la correlación (25), entonces el giro de la esfera se expresa en el plano por las transformaciones (41) ó (42) que son permutadas con la transformación (25), es decir, los resultados que se obtienen como consecuencia de estas transformaciones, son iguales, sea cual fuera el orden en que se realizan ellas.

Dado que los resultados de las transformaciones, realizadas en diverso orden, tienen la forma

$$\frac{-\dfrac{4a}{\bar{z}} + b}{-\dfrac{4c}{\bar{z}} + d} = \frac{-4a + b\bar{z}}{-4c + d\bar{z}}, \qquad -\frac{4}{\dfrac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}} = \frac{-4\bar{c}\bar{z} - 4\bar{d}}{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}},$$

entonces, comparando los miembros libres y factores de $\bar{z}$ en los numeradores y denominadores de las fracciones, llegamos a las correlaciones

$$d = \bar{a}, \quad c = -\frac{1}{4}\bar{b}. \qquad (44)$$

Las mismas correlaciones (44) se obtienen al realizar en diferente orden las transformaciones (42) y (25) y comparando los miembros libres y factores de $\bar{z}$ en las fracciones resultantes. Por ello, las revoluciones de la esfera son expresadas en el plano mediante los siguientes transfor-

maciones:

$$z' = \frac{az + b}{-\frac{1}{4}\bar{b}z + \bar{a}} \tag{45}$$

y

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{-\frac{1}{4}\bar{b}\bar{z} + \bar{a}}. \tag{46}$$

Al giro alrededor del diámetro SS' le corresponde la transformación (45) en la que $z' = 0$, cuando $z = 0$. En este caso $b = 0$ y la transformación (45) toma la forma

$$z' = \frac{a}{\bar{a}} z = (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) z.$$

§ 6.
DESARROLLO HISTÓRICO DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

La primera obra en la que aparece noción sobre la proyección estereográfica es "Planisferio" por Ptolomeo Claudio (II siglo a. n. e.). En el "Planisferio" se da la descripción del astrolabio, un instrumento para determinar las coordenadas de los astros en la esfera celeste, en el cual se utiliza el principio de la proyección estereográfica (véase el párrafo 7). En el texto de "Planisferio", conservado hasta nuestros días, se emplean (sin demostración) las propiedades A), B) y C) de la proyección estereográfica. La primera exposición de la teoría de la proyección estereográfica, que tiene una demostración completa de la propiedad A) pertenece al Ahmad Al-Fergani, sabio bel siglo IX quien nació en Fergana y trabajó en Bagdad. Al-Fergani dedicó a esta teoría el primer capítulo de su obra "Libro sobre la construcción del astrolabio". Posteriormente los sabios orientales han señalado que el libro de Al-Fergani sobre el astrolabio es una de las mejores exposiciones de la teoría de este instrumento. Ptolomeo, probablemente, sabía de esta teoría, pero no aparece en el texto de "Planisferio" que conocían los sabios de la Edad Media.

Al-Fergani demostró en su libro el lema al cual nos hemos referido a principios del párrafo 1 y dió la demostración de la propiedad A). Luego, señaló (como se hizo en el párrafo 1) que el punto de un plano, que sirve de proyección para el centro de la circunferencia en una esfera, no coincide con el centro de la circunferencia en el plano. La demostración de Al-Fergani que presentamos en este libro para la propiedad A) es muy parecida a la demostración de la quinta proposición en el libro I del célebre tratado "Secciones cónicas", escrito por Apolonio de Perga, geómetra griego (fines del siglo III a. n. e.). En el tratado se trata de la segunda familia de secciones circulares de un cono circular oblicuo. Es muy probable, por eso, que la propiedad A) de la proyección estereográfica, ya la conociera Apolonio. Observemos que en el tratado "Sobre lugares geométricos planos" Apolonio indica una propiedad análoga A′) de la inversión: los griegos antiguos llamaban lugares geométricos planos a las líneas que se pueden trazar con una regla y un compás, es decir, líneas rectas y circunferencias.

En el tratado "Sobre lugares geométricos planos" Apolonio dice que si "dos rectas" (esto es, dos segmentos rectilíneas) salen

de un mismo punto de la recta y "contienen el rectángulo dado" (es decir, el producto de las longitudes de estos segmentos es una constante) y sí, además, "un extremo de una de estas rectas describe el lugar geométrico plano, entonces, el extremo de otra recta también describe un lugar geométrico plano del mismo o diferente tipo". Apolonio señala también que lo mismo sucede cuando las rectas parten de diferentes puntos paralelamente o bajo un ángulo, es decir, en el caso en que un "lugar geométrico plano" se obtiene a partir de otro, por medio de una transformación que consiste de la inversión y el movimiento (en este mismo tratado Apolonio analiza la homotecia y la transformación compuesta de la homotecia y movimiento). Es evidente, que la mencionada proposición de Apolonio en "Secciones cónicas" prestaba a los griegos la posibilidad de obtener una rigurosa demostración de la propiedad A) de la proyección estereográfica lo que, probablemente, fue hecho, si no en los tiempos de Apolonio, por lo menos en el transcurso de los cuatro siglos que separaron a Apolonio de Ptolomeo.

El mérito de Al-Fergani consiste en que, disponiendo sólo de la formulación de la propiedad A), logró establecer de nuevo su demostración.

En la Edad Media la proyección estereográfica se denominaba "proyección de astrolabio". El término "proyección estereográfica" fue introducido en el año 1831 por el matemático alemán L. I. Magnus (1790 – 1861), a quien se atribuye a veces el descubrimiento de esta notable proyección. Este término se origina de las palabras griegas "στερεον", cuerpo espacial, de la que proviene el término "estereometría", y "γραφη" – "dibujar, escribir". Este último dio origen a nuestras palabras fotografía, geografía, biografía.

§ 7.
PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA EN LA ASTRONOMÍA Y LA GEOGRAFÍA

Veamos, ante todo, cuál es la estructura del astrolabio medieval, basada en la aplicación del principio de la proyección estereográfica. Actualmente todos los escolares conocen este instrumento que representa en sí un disco horizontal dispuesto sobre un trípode (fig. 14, *a*). A lo largo del borde del disco van marcadas divisiones graduales. En el centro se encuentra la alidada, una regla con dos pínulas, por medio de las cuales se puede visar la dirección sobre un punto a otro. Al dirigir visuales en diferentes puntos, se puede medir ángulos formados por las direcciones en la superficie de la Tierra. En la Edad Media el astrolabio se usaba para determinar las coordenadas de los astros en la esfera celeste lo que atestigua su propio nombre, proveniente de las palabras griegas "αστερ" (astro) y "λαβη" (captar). El disco con divisiones y la alidada (palabra árabe, significa "dispositivo") del astrolabio moderno constituían sólo una parte del astrolabio medieval. El astrolabio se suspendía de un anillo (véase fig. 14, *b*), su alidada se orientaba

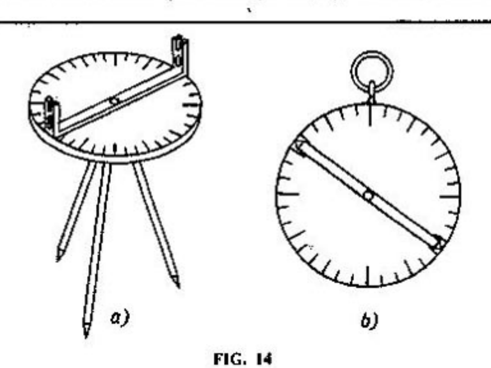


FIG. 14

hacia el astro elegido y la flecha de la misma indicaba en la escala graduada la altura del astro en grados.

Para determinar la segunda coordenada del astro se utiliza otra parte del astrolabio en la que están montados un disco inmóvil llamado "tímpano" y un disco grabado, "araña", que gira alrededor del centro del disco fijo. En el tímpano están representadas,

en proyección estereográfica, las circunferencias de la esfera celeste que no cambian durante su movimiento aparente diario: el ecuador celeste, representado por una circunferencia grande que en el movimiento indicado se transforma en sí misma; los trópicos de Cáncer y de Capricornio, que se representan por dos paralelas del ecuador celeste que tocan a la eclíptica, es decir, al círculo máximo de la esfera celeste que señala el curso aparente del Sol durante el año. La eclíptica comprende los doce signos o constelaciones del Zodíaco. El Sol corta el ecuador celeste en los días de los equinoccios de primavera y de otoño, y se halla a distancia máxima de él en los días de los solsticios de verano y de invierno, cuando entra el Sol en las constelaciones de Cáncer y de Capricornio de las cuales reciben sus nombres los trópicos; la propia palabra trópico tiene origen griego ("τροπε") y significa "un giro"; el horizonte y sus paralelas, almicantarates (de la palabra árabe "almucántara" que significa "construido con bóveda"); zenit (proviene de la palabra árabe "zemth" (dirección), la cual se transformó en "zenith" por error de un escribiente de la Edad Media quien en vez de "m" copió "ni"); verticales – círculos

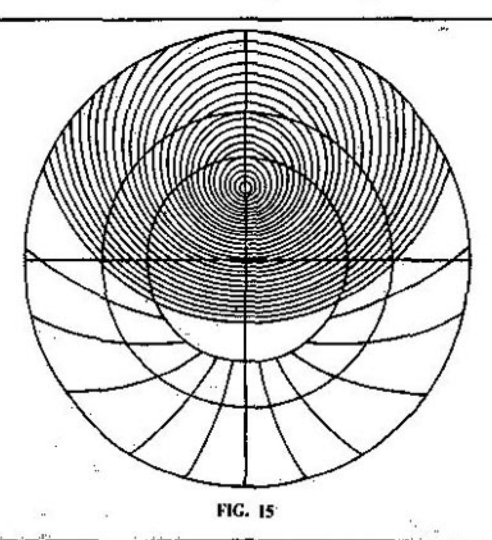


FIG. 15

grandes que pasan por el zenit perpendicularmente al horizonte.

En virtud de la propiedad A) todas las circunferencias mencionadas de la esfera se representan en el tímpano por arcos

de las circunferencias o por segmentos de líneas rectas. Por punto S se toma, como regla general, el polo austral de la esfera celeste. Por eso, el ecuador y los trópicos se representan en el tímpano por circunferencias concéntricas. El tímpano se corta, generalmente, por una circunferencia que representa el trópico (fig. 15). En el lugar de latitud geográfica φ el ecuador celeste forma con el horizonte un ángulo $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (en el ecuador terrestre es perpendicular al horizonte y coincide con él en los polos). Por eso, debido a la propiedad B), el horizonte se expresa por una circunferencia que corta la representación ecuatorial en dos puntos, diametralmente opuestos, bajo un ángulo $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Se puede demostrar que los almicantarates se representan por circunferencias, las cuales, junto con la representación circular del horizonte, forman un haz de circunferencias que son lugares geométricos de los puntos para los que la razón entre las distancias hasta el punto Z (zenit) y hasta el que representa el punto diametralmente opuesto (nadir) de la esfera celeste es una magnitud constante. Los verticales aparecen como círculos que pasan a través del punto Z perpendicularmente a la circunferencia que representa el horizonte.

Debajo del horizonte se trazan en los tímpanos las llamadas líneas horarias que sirven para determinar tiempo en las "horas de temporada", equivalentes a $\frac{1}{12}$ parte de la claridad u oscuridad del Sol durante el día astronómico. Las representaciones de los almicantarates y de los verticales forman una "telaraña" en la que se mueve la "araña". En la "araña" se representan la eclíptica y las estrellas más brillantes que giran, mientras tiene lugar el aparente movimiento diario de la esfera celeste. Es evidente que la eclíptica se expresa por una circunferencia que toca a las representaciones de los trópicos. En la representación de la eclíptica están indicadas las doce constelaciones del zodíaco (el Sol tarda un mes para recorrer cada una de las mismas) y divisiones complementarias de estos segmentos que permiten establecer la representación solar en cualquier día del año. Las estrellas se representan mediante puntos que parten del borde del haz o de la representación de la eclíptica (fig. 16).

De este modo, con ayuda del astrolabio puede medirse el azimut de los astros cuyas representaciones están indicadas en la "araña", es decir, del Sol o de una de las estrellas que aparecen en ella.

Una vez medida (mediante la alidada) la altura del Sol o de algún otro astro, se le da la vuelta al astrolabio y se gira la araña en un ángulo tal que la imagen del astro caiga sobre un almicantarat de la misma altura. En este caso se emplea la propiedad C) de la proyección estereográfica, en virtud de la cual el giro diario de la esfera celeste se representa por una vuelta de "la araña". Al realizar el giro de la "araña", obtenemos la representación exacta de la esfera celeste sobre un plano en el momento dado. El azimut del astro es igual en este momento al ángulo formado por el vertical, cuya imagen pasa por la representación del astro y cierto vertical de referencia. El ángulo en que se hace girar la araña nos indica con toda exactitud el lapso, en horas astronómicas, que ha pasado a partir del principio del día o de la noche, al que corresponde la posición de la "araña" en la que la imagen del astro coincide con la representación del horizonte. Con ayuda de las "líneas horarias", antes mencionadas, se determina también el tiempo en "horas estacionales" que en la Edad Media servía a la gente para el inicio de los rezos.

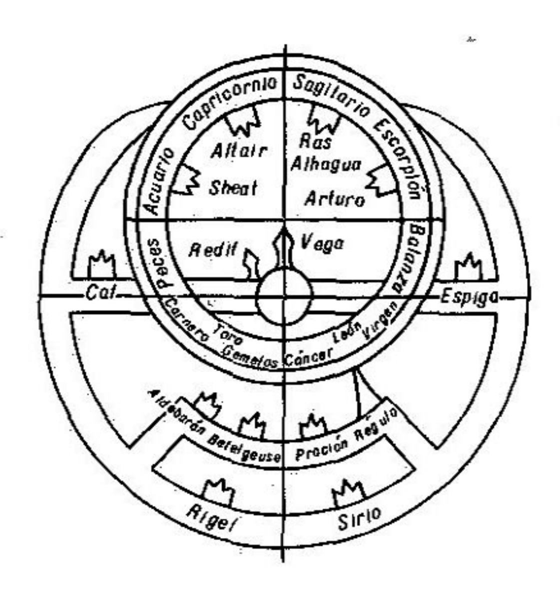


FIG. 16

La proyección estereográfica se usa también en la elaboración de los mapas, cuando la superficie del globo terrestre se hace proyectar sobre un plano. En los mapas, preparados de la manera indicada, los ángulos formados por líneas, conservan en la proyección su magnitud natural debido a la propiedad B). Estos mapas son de mucha importancia para los marinos, pues en este caso el ángulo de giro del timón es precisamente igual al ángulo medido por el mapa. Varias obras del eminente matemático Leonardo Euler (1707 – 1783) están dedicadas al empleo de la proyección estereográfica para levantar mapas. Entre ellas se pueden citar "Sobre la representación de una superficie esférica en el plano", "Sobre la proyección geográfica de una superficie esférica", "Sobre la proyección geográfica de Delille, aplicada en El Mapa general del Imperio de Rusia". En las obras mencionadas Euler plantea la cuestión referente a una transformación más general de la esfera en un plano que conservara los ángulos formados por líneas. Con este fin Euler efectúa la proyección estereográfica de la esfera en un plano, y luego, considerando el plano como un plano de variable compleja, realiza en él una transformación haciendo uso de la función $w = f(z)$ que tiene la derivada $\frac{dw}{dz}$, o de la función $w = \overline{f(z)}$, conjugada con la primera: para las funciones de este tipo las diferenciales dz y dw están ligadas mediante la correlación (36) de la cual se desprende la verificación de la propiedad B′) para ambas transformaciones.

§ 8.
APLICACIÓN DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA A LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

Uno de los métodos más simples para determinar el plano de Lobachevski consiste en lo siguiente: si se cambia en nuestro espacio común la ley de determinación de las distancias (métrica) de manera que la distancia M_1M_2 entre los puntos $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ y $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$, se exprese no por medio de la fórmula (8) sino por la fórmula

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 - (Z_2 - Z_1)^2} \tag{47}$$

y el ángulo φ entre los vectores $\overline{OM_1}$ y $\overline{OM_2}$ se halla no con ayuda de (9) sino a través de la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 - Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2}}, \tag{48}$$

entonces el espacio recibe el nombre de *espacio seudoeuclidiano*. A diferencia del espacio euclidiano común, el espacio seudoeuclidiano comprende segmentos de longitud real, longitud cero y de longitud puramente imaginaria; rectos de tres tipos cuyos segmentos tiene una longitud real, longitud cero ("rectas isótropas") e imaginaria; planos de tres tipos: de geometría euclidiana, seudoeuclidiana y de geometría "isótropa", que es intermedia entre las geometrías euclidiana y seudoeuclidiana; esferas de tres tipos: de radio real, de radio puramente imaginario y de radio cero. Las ecuaciones de estas tres esferas con centro en el origen de coordenadas tienen respectivamente las siguientes formas:

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = R^2, \tag{49}$$

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -R^2 \tag{50}$$

y

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0. \tag{51}$$

Por eso, en el espacio seudoeuclidiano las esferas de radio real tienen el aspecto de un hiperboloide de una hoja (fig. 17, *a*), las de radio puramente imaginario se representan como hiperboloides de dos hojas (fig. 17, *b*), y las de radio cero tienen la forma de conos (fig. 17, *c*). El cono (51) se denomina cono asintótico de las esferas (49) y (50).

El plano de Lobachevski puede definirse como una esfera de radio imaginario en el espacio seudoeuclidiano cuyos puntos diametralmente opuestos son idénticos (o como una de las cavidades en esta esfera). El papel de líneas rectas en el plano de Lobachevski, lo desempeñan las secciones diametrales de la esfera, análogas a las circunferencias grandes de una esfera común. No es difícil convencerse de que los planos tangentes a esta esfera son euclidianos, de donde se deduce que la geometría de tal esfera, considerada en las pequeñas porciones de ésta, como también la de esfera común en sus pequeñas porciones respectivas, se diferencian

poco de la geometría euclidiana (al contrario, los planos tangentes a la esfera de radio real en el espacio seudoeuclidiano son seudoeuclidianos, mientras que los planos tangentes a la esfera de radio cero son "isótropos"). Por otra parte, si proyectamos la esfera de radio imaginario desde su centro sobre el plano tangente (fig. 18, *a*), todo el plano de Lobachevski

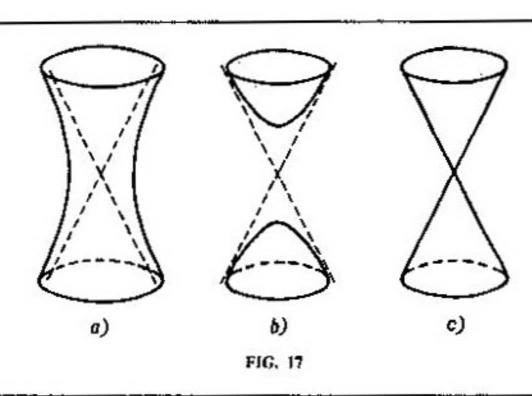


FIG. 17

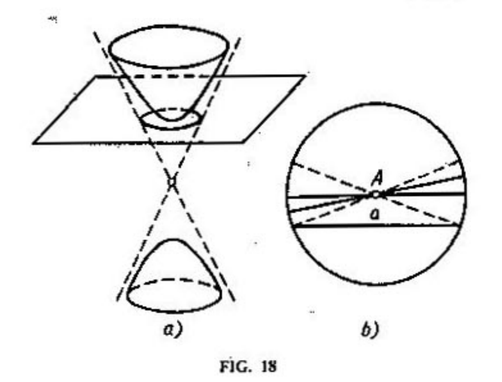


FIG. 18

se representará en la forma del campo interior de un círculo (que resulta de la intersección del plano de proyección con el cono asintótico de la esfera) y las secciones diametrales de la esfera, es decir, las rectas del plano de Lobachevski, se representarán por las cuerdas del círculo mencionado (esta proyección lleva el nombre de *interpretación de Beltrami—Klein* del plano de Lobachevski).

En la fig. 18, *b* se ve con toda la claridad que a través del punto *A* de la proyección dada se pueden trazar más de una cuerda que no corte la cuerda dada *a*, lo que corresponde al axioma de Lobachevski por el

cual: a través de un punto de cierto plano se pueden trazar más de una recta en este plano que no corte la recta dada del mismo. Por otra parte, es posible demostrar que en el plano dado se cumplen todos los axiomas de la geometría euclidiana, a excepción del de paralelismo, en virtud del cual no se puede trazar por un punto del plano más de una recta que no corte la recta dada.

El espacio seudoeuclidiano, lo mismo que el euclidiano, permite definir la proyección estereográfica de la esfera (tanto de radio real como imaginario) en el plano. En particular, la proyección estereográfica de la esfera de radio i, definida por la ecuación

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1, \tag{52}$$

efectuada del punto $S(0, 0, 1)$ sobre el plano $Z = -1$ (fig. 19), se expresa

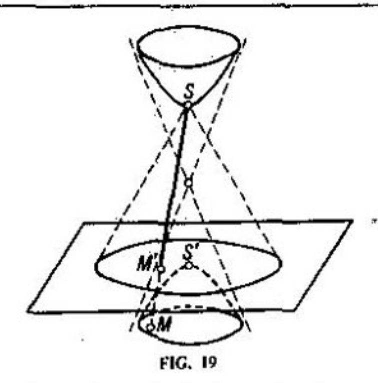


FIG. 19

por las fórmulas análogas a las (12),

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{4x}{4 - x^2 - y^2}, \\ Y &= \frac{4y}{4 - x^2 - y^2} \\ Z &= \frac{x^2 + y^2 + 4}{x^2 + y^2 - 4}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Con ayuda de estas fórmulas, como en el § 3, se demuestran las propiedades A), B) y C) de la proyección estereográfica de la esfera de radio imaginario sobre un plano. Con esto, toda la cavidad inferior de la esfera de radio imaginario será representada en la proyección en forma del campo interior del círculo

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{54}$$

cortado del plano por un cono, obtenido a su vez, a partir de un cono asintótico de la esfera de radio imaginario, cuando su vértice es trasladado

desde el centro de la esfera al punto S. La cavidad superior de la esfera, naturalmente, será representada por el campo exterior del círculo mencionado.

Si consideramos el plano como un plano de variable compleja, entonces la circunferencia (54) coincidirá con la (27); lo mismo que en el § 4 se puede mostrar que los puntos diametralmente opuestos de una esfera de radio imaginario se expresan en el plano por los puntos que se hallan en la inversión respecto a esta circunferencia de lo que se deduce que todas las secciones diametrales de la esfera, es decir, las rectas del plano de Lobachevski, son expresadas por circunferencias que en la inversión se convierten en sí mismas. En otras palabras, se expresan por las circunferencias ortogonales a la circunferencia (54). Esta es la así llamada *interpretación de Poincaré* del plano de Lobachevski.

Como es sabido, la suma de los ángulos de un triángulo del plano de Lobachevski es siempre inferior a π (se puede demostrar que el área del triángulo del plano de Lobachevski es igual al producto de la diferencia entre π y la suma de sus ángulos por el cuadrado del módulo del radio de la esfera correspondiente de radio imaginario). Igual que en el § 4 podemos cerciorarse de esto: si representamos en la interpretación de Poincaré el triángulo ABC (en la fig. 20 el lado AC de este triángulo

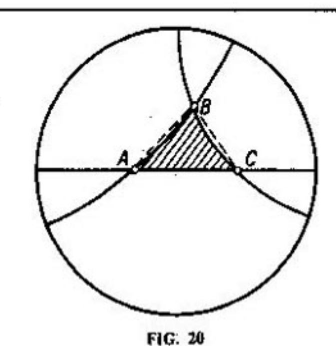


FIG. 20

se representa por el segmento del diámetro de la circunferencia (54); los lados AB y BC por los arcos de las circunferencias otrogonales a la circunferencia (54)). Entonces, en virtud de la propiedad B), los ángulos del triángulo se expresan sobre el plano en su magnitud natural. Unamos, ahora, los vértices del triángulo plano con líneas rectas; la suma de los ángulos del triángulo obtenido en el plano es igual a π, y la fig. 20 nos muestra que la suma de ángulos del triángulo ABC en el plano de Lobachevski es inferior a la suma de ángulos del triángulo plano, es decir, es menos que π.

Ya que por un punto del plano de Lobachevski es posible trazar varias rectas que no corten la recta dada, entre la infinidad de estas rectas deben haber dos líneas limítrofes que separen las rectas que pasan por el punto dado y corten la recta dada, de los que pasan por el mismo punto y no cortan la línea mencionada. Estas dos rectas se llaman rectas

paralelas a la línea dada; las demás rectas (que no cortan la recta dada) se denominan rectas *divergentes* con la recta dada. Se puede mostrar que en nuestra proyección estereográfica *las rectas paralelas se representan por los arcos de las circunferencias que se tocan en el punto situado en la circunferencia* (54).

En el plano de Lobachevski existen tres clases de las curvas: circunferencias, equidistantes y oriciclos.

1) *La circunferencia* se define (igual que en el plano común) como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto. Igual que en el plano común, las circunferencias en el plano de Lobachevski se pueden definir también como líneas curvas las cuales en cada uno de sus puntos cortan en ángulo recto las rectas de cierto haz de rectas que se intersecan en un punto.

2) Se llama *equidistante* una curva que equidista de una recta dada denominada base de la equidistante. Ee el plano de Lobachevski, a diferencia del plano común, los lugares geométricos de esta índole no son un par de rectas sino que ciertas curvas compuestas de dos ramas. La equidistante puede definirse también como una curva que en cada uno de sus puntos corta en ángulo recto las rectas perpendiculares a una recta dada, base de la equidistante.

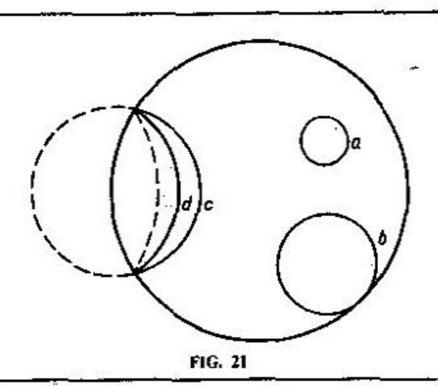


FIG. 21

3) Se llama *oriciclo* una curva que en cada uno de sus puntos corta bajo un ángulo recto las rectas paralelas entre sí (la palabra oriciclo significa "círculo límite").

Se puede mostrar que en nuestra proyección estereográfica las circunferencias del plano de Lobachevski se representan por circunferencias que se hallan dentro del campo interior del círculo (54) (fig. 21, *a*). Los oriciclos se expresan mediante circunferencias que tocan el círculo (54) (fig. 21, *b*) en el punto por el cual pasan los arcos de las circunferencias que representan rectas paralelas, perpendiculares al oriciclo. Las equidistantes se representan por las circunferencias que cortan el círculo (54) en dos puntos (fig. 21, *c*), precisamente en aquellos donde la circunferencia que representa la base de la equidistante (fig. 21, *d*) corta el círculo (54). Al identificar los puntos diametralmente opuestos de una esfera de radio imaginario, cada punto del plano se identifica con el punto en el cual

el primero se transforma durante la inversión respecto al círculo (54), una parte de la circunferencia que representa la equidistante situada fuera del círculo (54) puede sustituir por un arco en el campo interior del mismo en el cual se traslada durante la inversión el arco indicado. En la esfera de radio imaginario las curvas indicadas se representan por secciones planas, las circunferencias se originan a partir de las secciones por planos euclidianos del espacio seudoeuclidiano, equidistantes — de las secciones por planos seudoeuclidianos del mismo espacio, oriciclos — de secciones por planos "isótropos".

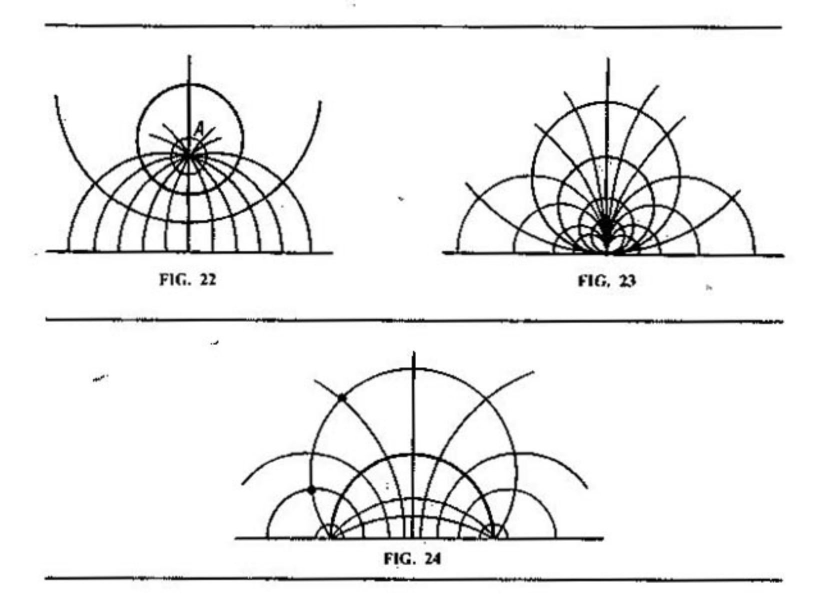


FIG. 22

FIG. 23

FIG. 24

Precisamente a esta circunstancia se debe el hecho de que en la proyección estereográfica todas estas curvas se representen por circunferencias.

Observemos que Poincaré propuso su interpretación en otra forma, en la que el semiplano superior del plano de variable compleja desempeña el papel del círculo (54) y el de la circunferencia (54) pertenece al eje real de este plano. En esta interpretación las líneas rectas de Lobachevski son representadas por semicírculos con el centro situado en el eje real, mientras que las circunferencias (fig. 22), oriciclos (fig. 23) y equidistantes (fig. 24) se expresan mediante círculos que no se intersecan con el eje real, que lo tocan o que lo cortan en dos puntos bajo un ángulo no recto (si una circunferencia corta el eje real bajo un ángulo recto, es, entonces, la representación de una recta).

El movimiento del plano de Lobachevski se representa en este caso por transformaciones fraccionarias lineales (41), en las que todos cuatro números a, b, c, d son reales.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial 1977
"Lecciones populares de matemáticas"

Beskin N.
Representaciones de figuras espaciales

Yaglom I.
Álgebra extraordinaria

Ventsel E.
Elementos de la teoría de los juegos

Natanson I.
Problemas elementales
de máximo y mínimo

Barsov A.
Qué es programación lineal

Boltianski V.
La envolvente

Markushevich A.
Curvas maravillosas

Markushevich A.
Números complejos
y representaciones conformes

Editorial MIR  Moscú